Apellido paterno:	**Apellido materno:**	**Nombre:**

Pregunta 1	**Pregunta 2**	**Pregunta 3**	**Total**	**Nota**

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**. Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$. **Duración** = 60 minutos

---

1) (**15 pts.**) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{(n-1)\sqrt{n^3-2}}$ es convergente o divergente. Justifique.

2) (**20 pts.**) Determine el radio y el dominio de convergencia para la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln(n)}$$

Hint: La función $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ es decreciente para $x > 1$.

3) (**25 pts.**) Sea $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

a) (**8 pts.**) Use la representación en serie de potencias de la función $\dfrac{1}{1-x}$ para obtener la serie de Maclaurin de $f(x)$.

b) (**5 pts.**) Use el polinomio de Taylor de grado 3 de f para estimar el valor de $\ln(2)$.

c) (**12 pts.**) Use series para obtener un valor aproximado de la integral definida $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ con una exactitud tal que $|\text{error}| < 0.05$.

Pauta

1) Por el criterio de comparación directa, tenemos que

$$\frac{3n^2+2n+1}{(n-1)\sqrt{n^3-2}} > \frac{3n^2}{n\sqrt{n^3}} = \frac{3}{n^{1/2}}$$

Como $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{n^{1/2}}$ es una p-serie dirvergente, se sigue que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2+2n+1}{(n-1)\sqrt{n^3-2}}$ diverge.

Otra manera de realizar el estudio es através de comparación en el límite con la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$.

2) Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

Ahora, por el criterio del cociente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)} \cdot \frac{n\ln(n)}{x^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right) \left(\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \right) = |x|$$

Luego, el radio de convergencia es $R = 1$ y la serie converge si $-1 < x < 1$. Ahora, estudiemos los extremos $x = -1$ y $x = 1$.

Para $x = -1$ nos queda la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$, la cual es convergente por el criterio de series alternantes (usando la indicación tenemos que $\dfrac{1}{n\ln(n)}$ es decreciente y además note que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\ln(n)} = 0$).

Para $x = 1$ nos queda la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$, la cual es divergente por el criterio de la integral. En efecto, como $\dfrac{1}{x\ln(x)}$ es decreciente y positiva para $x > 2$, tenemos que la serie se comporta como la integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx$. Notemos que

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \lim_{t\to\infty} [\ln(u)]\Big|_{\ln(2)}^{t} = \lim_{t\to\infty} (\ln(t) - \ln(\ln(2))) = \infty$$

3) Recordemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad |x| < 1$$

a) Tenemos que

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad |x| < 1$$

Luego

$$\ln(x+1) = \int \frac{1}{x+1} = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + C$$

Considerando $x = 0$, tenemos que $C = 0$. Esto implica que

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{5} - \cdots$$

b) Considerando $x = 1$ en la representación anterior tenemos que

$$\ln(2) = \frac{\ln(1+1)}{1} \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1^2}{3} - \frac{1^3}{4} = \frac{7}{12}$$

c) De la representación en serie de f tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k+1} \right) dx \\
&= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} \right] \Bigg|_0^1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Por el teorema de estimación de series alternantes, sabemos que $|R_n| < \dfrac{1}{(n+2)^2}$. Luego, buscamos un natural n tal que $\dfrac{1}{(n+2)^2} < 0.05$, para lo cual es suficiente escoger $n = 3$. Concluimos entonces que

$$\int_0^1 f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+1)^2} = S_3 + R_3 = \frac{115}{144} + R_3$$

donde $|R_3| < 0.05$.